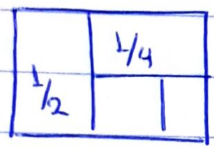
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ 2 18/02/2019 (Σαρόγλου)

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ φορές}} = n \xrightarrow{n\to+\infty} \infty$

$\underbrace{0+0+\dots+0}_{n\text{-φορές}} = n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = 2$



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = 1$

Έστω $\{\alpha_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών
Ορίζουμε $S_n = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$
S_n = n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$
Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, τότε λέμε ότι

$S = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$. Αν $S \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει (στο S)

Αν $S = \pm\infty$ ή $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει (αποκλίνει)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>: 1 Γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (i): $|\alpha| < 1$
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ii): $|\alpha| \geq 1$

Τύπος $S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$, $\alpha \neq 1$

Απόδειξη για τον τύπο $S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

$S_{n+1} = (\alpha^0 + \alpha^1 + \dots + \alpha^n) + \alpha^{n+1} = S_n + \alpha^{n+1}$

$S_{n+1} = \alpha^0 + (\alpha^1 + \dots + \alpha^n + \alpha^{n+1}) = 1 + \alpha(\alpha^0 + \alpha^1 + \dots + \alpha^n)$

$= 1 + \alpha \cdot S_n$

$\Rightarrow S_n + \alpha^{n+1} = 1 + \alpha S_n \Rightarrow S_n(1-\alpha) = 1 - \alpha^{n+1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

i) $S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1-0}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$

(συγκλίνει)

ii) Αν $\alpha \neq 1$, $S_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$, $\lim_{n \to \infty} S_n$ δεν υπάρχει $\Rightarrow \sum^{\infty} \alpha^k$

Αν $\alpha = 1$, $S_n = 1^0 + 1^1 + \dots + 1^n = n+1 \to \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \infty$

(αποκλίνει)

2) Τηλεσκοπικές σειρές: Έστω $\{\alpha_k\}$ πραγματικών

Θέτω $b_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = ;$

Έστω $\{S_n\}$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, δηλαδή

$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_k = (\alpha_1 - \cancel{\alpha_2}) + (\cancel{\alpha_2} - \cancel{\alpha_3}) + \dots + (\cancel{\alpha_{n-1}} - \cancel{\alpha_n}) + (\alpha_n - \alpha_{n+1})$

$= \alpha_1 - \alpha_{n+1}$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει αν-ν το $S = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$

υπάρχει οπότε $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha_1 - S$

Π.χ α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Αν ο γενικός όρος γράφεται σαν διαφορά μιας ακολουθίας με τον επόμενο όρο τότε η σειρά είναι τηλεσκοπική

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \lim \frac{1}{k} = 1$$

$$a_k = \frac{1}{k}$$

β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1(1+2)} + \frac{1}{2(2+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{4}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ κ $S_n = a_1 + \dots + a_n$

$\{a_n\} \to b_n = a_n - a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2$ $a_0 = 0$

$$\sum_{n=1}^{n-1} (-b_k) = -[(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_{n-1} - a_n)] = a_n$$

* Η σειρά μπορεί να είναι μια ακολουθία

Τέλος

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ:

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \ell$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = m$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τοτε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\right) + \mu\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\right)$$

οταν

i) Τουλάχιστον ενα απο τα, $\ell, m \in \mathbb{R}$

ii) $\lambda\ell = \mu m = +\infty$ ή $-\infty$

Note: αν $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \ell + \infty$ κ' η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = -\infty$ τοτε δεν οριζεται η διασπαση

Αποδειξη:

Εστω $\{S_n\}$, $\{t_n\}$, $\{u_n\}$ οι ακολουθιες των μερικων αθροισμάτων των σειρων $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)$ αντιστοιχα. Εχουμε,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n}\alpha_k + \mu \sum_{k=1}^{n}\beta_k = \lambda S_n + \mu t_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda\ell + \mu m$$

(εχουμε πεπερασμενο αθροισμα ισχυει η επιμεριστική ιδιοτητα)

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$$ οταν ισχυουν ενα απο τα (i) κ' (ii)

Απο Απ1: Αμα παραλειψεις όρους μιας ακολουθιας που συγκλινει θα συγκλινει και η υπακολουθια της.

ΠΡΟΤΑΣΗ: (i) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλινει αν-ν η σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ συγκλινει

(ii) Αν αλλάξουμε πεπερασμενου πλήθους όρους της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ ~~συγκλινει~~ δεν αλλάζει τιποτα προς την συγκλιση της

Απόδειξη: i) Έστω $\{S_n\}, \{t_n\}$ οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ κ' $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ αντίστοιχα

$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \ n \in \mathbb{N}$
$t_n = \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n, \ n \geq m$
$\Big\}\ S_n = S_{m-1} + t_n$

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει αν-αν $\{S_n\}$ συγκλίνει αν-αν $\{t_n\}$ συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) + \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$

ii) Έστω $\{\beta_n\}$ ακολουθία, τέτοια ώστε $\alpha_n = \beta_n, \ \forall n \geq m$ $(m \in \mathbb{N})$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει

αν-αν $\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει από (i) συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=m}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει αν-αν $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει

** Το αποτέλεσμα αλλάζει η σύγκλιση όμως όχι

ΘΕΩΡΗΜΑ SOS (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ)
(Χρήση μόνο εάν θέλουμε νδο δεν συγκλίνει ΟΧΙ άμα θέλουμε να δείξουμε ότι συγκλίνει)
Αν $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε $\alpha_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$

Απόδειξη: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xrightarrow{n \to \infty} S$ (για κάποιο $S \in \mathbb{R}$)

$S_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) + \alpha_n = S_{n-1} + \alpha_n \Rightarrow$
$\alpha_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u> (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ Γενικός όρος $= \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \neq 0$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi)$ ——"—— $= \sin(k\pi)$

$\sin(1\cdot\pi)=0, \sin(2\pi)=0, \sin(3\pi)=0 \ldots$
άρα όλοι οι όροι πάνε στο μηδέν

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\frac{\pi}{2})$, $\cos(1\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\frac{2\pi}{2}) = -1$,

$\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$, $\cos(\frac{4\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{5\pi}{2}) = 0$

{ Από Απ1 δεν συγκλίνει γτ έχει παραπάνω σ.σ }

(Δεν μας ενδιαφέρει αν η ακολουθία συγκλίνει ή όχι αλλά μας νοιάζει αν συγκλίνει στο μηδέν άρα παίρνουμε υπακολουθίες)

$a_k = \cos(k\frac{\pi}{2})$

$a_{4k} = \cos(4k\frac{\pi}{2}) = 1 \xrightarrow{k\to\infty} 1$

Έχω βρει μια υπακολουθία της $\{a_k\}$ (η $\{a_{4k}\}$) που να συγκλίνει στο $1 \neq 0 \Rightarrow a_k \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\frac{\pi}{2})$ αποκλίνει (από το κριτήριο απόκλισης)

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ αποκλίνει γιατί $(-1)^k$ δεν συγκλίνει

(άρα το $(-1)^k \not\to 0$)

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

αρμονική σειρά

Ενώ η ακολουθία πάει στο μηδέν η σειρά δεν συγκλίνει. Δεν συγκλίνει, όμως $\frac{1}{k} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ Cauchy)

Η Σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν-αν $(\forall \varepsilon>0), (\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$ $(m \geq n+1)$, να ισχύει $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

<u>ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ Cauchy για ακολουθίες</u>: $\{b_n\}$ συγκλίνει αν-αν $(\forall \varepsilon>0)$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$, $|b_m - b_n| < \varepsilon$

(το χρησιμοποιούμε για να δείξουμε και ότι συγκλίνει ή ότι αποκλίνει)

$\forall m, n \geq n_0$ τ.ω $m \geq n+1$

<u>Απόδειξη</u> (Θεωρήματος)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\longleftrightarrow$ $\{S_n\}$ συγκλίνει $\longleftrightarrow$ αν η $\{S_n\}$ είναι Cauchy $\Leftrightarrow$

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall m, n \geq n_0$ $m \geq n+1$, να ισχύει $|S_m - S_n| < \varepsilon$

$$S_m - S_n = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$

Επομένως $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η αρμονική σειρά αποκλίνει

Έστω ότι συγκλίνει

Έστω $\varepsilon = 1/2$

· Έστω ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω $\forall m, n \geq n_0$ $m \geq n+1$

να ισχύει $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| < \varepsilon$

$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} = \underbrace{\overset{\geq 1/m}{\frac{1}{n+1}} + \overset{\geq 1/m}{\frac{1}{n+2}} + \dots + \overset{\geq 1/m}{\frac{1}{m}}}_{(m-n)\text{-όροι}} \geq \frac{m-n}{m}$$

Διαλέγω $n = n_0$, $m = 2n_0$

$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} > \frac{2n_0 - n_0}{2n_0} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ για $\varepsilon = 1/2$ ισχύει $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists m, n \geq n_0$ $(m \geq n+1)$

$(m = 2n_0, n = n_0)$ τ.ω $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}\right| > \frac{1}{2}$

άτοπο $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

Απόδειξη:

$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} = S_{n-1}$

$\Rightarrow S_n \geq S_{n-1}$ άρα η S_n είναι αύξουσα

(είτε συγκλίνουν είτε το όριο της να είναι $+\infty$ από Απ 1)

$S_n = \begin{cases} \{S_n\} \text{ ~~συγκλίνει~~ (πριν το δείξαμε)} \\ S_n \to +\infty \end{cases}$

$\xrightarrow[\text{δεν συγκλίνει}]{\{S_n\}}$ $S_n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$\{S_n\}$
αύξουσα